

**ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА
ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ**

Шотемиров Йулдош Сафарович
старший преподаватель кафедры математики, Навоийского
государственного университета г. Навои.
e-mail: shotemirov.y@gmail.com

Yuldo'sh Safarovich Shotemirov,
Senior Lecturer of the Department of Mathematics,
Navoi State University, Navoi
e-mail: shotemirov.y@gmail.com

Аннотация

Данная работа посвящена изучению инвариантных подпространств оператора типа Шредингера на решетке. Одной из фундаментальных задач, возникающих при изучении самосопряженных операторов, является поиск инвариантных элементов.

В работе рассматриваются инвариантные подпространства двухчастичного оператора на одномерной решетке. Автор показывает, что пространство $L_2(T)$ может быть разложено в прямую сумму подпространств четных и нечетных функций. Подпространства $L_2^-(T)$, $L_2^+(T)$, $L(1)$, $L(2)$ являются инвариантными относительно оператора $H(k)$.

Annotation

This work is dedicated to the study of invariant subspaces of the Schrödinger-type operator on a lattice. One of the fundamental problems that arises in the study of self-adjoint operators is the search for invariant elements.

The paper considers the invariant subspaces of the two-particle operator on a one-dimensional lattice. The author shows that the space $L_2(T)$ can be decomposed into a direct sum of subspaces of even and odd functions. The subspaces $L_2^-(T)$, $L_2^+(T)$, $L(1)$, $L(2)$ are invariant with respect to the operator $H(k)$.

Ключевые слова: оператор Шредингера, двухчастичный оператор, одномерная решетка, собственное значение.

Keywords: Schrödinger operator, invariant subspaces, two-particle operator, one-dimensional lattice, eigenvalue.

Одной из фундаментальных задач, возникающих при изучении спектров самосопряженных операторов, заданных в гильбертовом пространстве, является поиск инвариантных элементов, или, по крайней мере, поиск элементов, сохраняющих свое направление под действием этого оператора. То есть, это поиск решения следующего уравнения

$$Hf = \lambda f. \quad (1)$$

Каждое ненулевое решение f уравнения (1) называется собственным вектором оператора H , а λ называется собственным значением оператора H . Если λ является собственным значением оператора, то множество всех решений уравнения (1) образует подпространство. Это подпространство является инвариантным подпространством оператора H и называется собственным подпространством, соответствующим собственному значению λ . Кратность собственного значения определяется как размерность этого собственного подпространства.

В данной работе изучаются инвариантные подпространства оператора типа Шредингера для двух частиц на одномерной решетке. Собственные значения двухчастичного непрерывного оператора Шредингера

$$H(\lambda) = -\Delta + \lambda V$$

были изучены многими авторами, причем условия, наложенные на потенциал V , задавались в координатном пространстве.

Например, Т. Като в работе [1] доказал, что оператор $H(\lambda)$ не имеет положительных собственных значений, если потенциал V удовлетворяет условию $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}$ за пределами шара конечного радиуса, где $\alpha > 1$. Приведено множество признаков конечности числа отрицательных собственных значений оператора $H(\lambda)$. В работе [2] приведены достаточные условия конечности собственных значений оператора Шредингера для двух частиц на d -мерной решетке. Инвариантные подпространства двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке, изучены в работе [3].

Постановка задачи. На одномерной решетке Z свободный гамильтониан $\hat{H}_0$, соответствующий двухчастичной системе, является самосопряженным ограниченным оператором и задается в гильбертовом пространстве $\ell_2(Z \times Z)$ функций с суммируемым квадратом по следующей формуле:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2.$$

где $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ и $\Delta_2 = \Delta \otimes I$, Δ — оператор конечных разностей Лапласа, который описывает переход частиц от одного узла к другому, то есть

$$(\Delta\psi)(x) = \psi(x+2) + \psi(x-2), \psi \in l_2(Z).$$

Двухчастичный гамильтониан $\hat{H}$ в гильбертовом пространстве $\ell_2(Z \times Z)$ выражается как $\hat{H} = \hat{H}_0 = \hat{V}$, где $\hat{H}_0$ свободный гамильтониан, $\hat{V}$ оператор выражающий взаимодействие частиц, то есть

$$(\hat{V}\psi)(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2)\psi(x_1, x_2), \quad \psi \in \ell_2(Z \times Z).$$

Потенциал $v: Z \rightarrow \mathbb{R}$ является четной функцией и принадлежит в $\ell_1(Z)$.

Переход от координатного представления гамильтониана двухчастичной системы к его импульсному представлению осуществляется с помощью преобразованием Фурье $F: L_2(T^2) \rightarrow \ell_2(Z^2)$, где $T = [-\pi, \pi]$. Импульсное представление двухчастичного гамильтониана $H = F^{-1}\hat{H}F$ разлагается в прямой интеграл семейства операторов $\{H(k), k \in T\}$ [2- 3], то есть,

$$H = \int_T \oplus H(k)dk.$$

Здесь

$$H(k) = H_0(k) - V: L_2(T) \rightarrow L_2(T), \quad (2)$$

$$(H_0(k)f)(p) = \varepsilon_k(p)f(p), \varepsilon_k(p) = 2 \cos k \cos 2p, \quad (3)$$

$$(Vf)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T v(p-q)f(q)d(q). \quad (4)$$

Здесь функция v является Фурье-образом потенциала $\hat{v}$.

Пространство $L_2(T)$ может быть разложено в прямую сумму подпространств $L_2^+(T)$ и $L_2^-(T)$ состоящих из четных и нечетных функций соответственно, то есть $L_2(T) = L_2^+(T) \oplus L_2^-(T)$.

Теорема 1. Подпространства $L_2^-(T)$ и $L_2^+(T)$ являются инвариантными относительно оператора $H(k) = H_0(k) - V$.

Пусть $\psi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inp}$, $n \in \mathbb{Z}$ ортонормированный базис в $L_2(T)$.

Обозначим через $L^{(1)} = \text{span}\{\psi_{2n-1}, n \in \mathbb{Z}\}$, $L^{(2)} = \text{span}\{\psi_{2n}, n \in \mathbb{Z}\}$ подпространства натянутые на векторы $\{\psi_{2n-1}, n \in \mathbb{Z}\}$, $\{\psi_{2n}, n \in \mathbb{Z}\}$, соответственно.

Теорема 2. Подпространства $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ являются инвариантными относительно оператора $H(k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972. С-72.
2. J.I. Abdullayev and I.A. Ikromov. Finiteness of the number of eigenvalues of the two-particle Schrodinger operator on a lattice. Theoretical and Mathematical Physics, 152(3):1299-1312 (2007).
3. Абдуллаев Ж.И., Файзиев М.Ш., Шотемиров Й.С. Инвариантные подпространства двухчастичного оператора Шредингера на решетке, Узбекский математический журнал, № 3, 2009. С.3-10.